Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 29. April 2004
Abgabe 6. Mai 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 2

AUFGABE 5 (4 Punkte)**:**
Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

1. Wenn alle Kanten eines Netzwerks paarweise verschiedene Kapazitäten haben, so gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Schnitt.
2. Im Restnetzwerk G_f gilt $rest(u, v) + rest(v, u) = c(u, v)$ für jede Kante $(u, v) \in E$.
3. Wenn alle Kantenkapazitäten mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert werden, ändert sich der minimale Schnitt nicht.
4. Wenn zu allen Kantenkapazitäten eine beliebige positive Zahl addiert wird, ändert sich der minimale Schnitt nicht.

AUFGABE 6 (6 Punkte)**:**
Die ESA möchte auf einem Weltraumflug eine Reihe von Experimenten $\mathcal{E} := \{E_1, \ldots, E_n\}$ durchführen. Für die Durchführung der Experimente stehen die Instrumente $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_m\}$ zur Verfügung, die jeweils Kosten $c_1, \ldots, c_m$ verursachen, wenn sie auf den Flug mitgenommen werden. Für die Durchführung von Experiment $E_i \in \mathcal{E}$ wird eine Teilmenge $T_i \subseteq \mathcal{I}$ der Instrumente benötigt. Um die Kosten zu decken, wirbt die ESA für jedes Experiment $E_i \in \mathcal{E}$ einen Sponsor an, der das Experiment mit d_i bezuschusst.
Wie kann die ESA die Projekte so auswählen, dass der Gewinn (=Summe der Sponsorengelder minus Kosten der nötigen Instrumente) maximiert wird?
Betrachte ein Netzwerk mit Quelle q und Senke s, einem Knoten für jedes Experiment und einem Knoten für jedes Instrument. Die Quelle ist mit den Instrumenten über eine Kante verbunden, deren Kapazität den Kosten des Instruments entsprechen. Analog ist die Senke mit Experimenten verbunden, und die Kapazitäten dieser Kanten entsprechen den Sponsorengeldern. Kanten unbeschränkter Kapazität verbinden Instrumente mit den Experimenten, in denen sie benötigt werden.

(a) Betrachte einen Schnitt (Q, S) endlicher Kapazität. Zeige, dass $T_i \subseteq S$, falls $E_i \in S$.

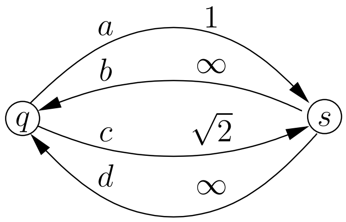
(b) Wie kann man den Nettogewinn anhand des minimalen Schnittes berechnen?

(c) Finde einen Algorithmus, der entscheidet, welche Experimente durchgeführt werden sollen und analysiere dessen Laufzeit.

AUFGABE 7 (4 Punkte)**:**
Beweise formal Beobachtung 2 aus dem Skript: Für jeden Fluss f und jeden Schnitt (Q, S) gilt $w(f) = f(Q, S) \leq c(Q, S)$.

AUFGABE 8 (6 Punkte)**:**
Zeige, dass es einen Graphen und eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen gibt, so dass der Gesamtfluss nicht gegen den maximalen Fluss konvergiert.

(a) Betrachte den folgen Graphen:



Dieser Graph ist zunächst noch keine zulässige Eingabe für das Flussproblem (Multikanten, eingehende Kanten in der Quelle). Dennoch läßt sich die Definition des Flusses und von Fv-Wegen einfach übertragen. Zeige zunächst, dass es in diesem Graphen eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen gibt, die gegen den maximalen Fluss konvergiert, ohne ihn zu erreichen.

(b) Erweitere den Graphen so, dass sich der maximale Fluss vergrößert, aber die unendliche Sequenz noch immer möglich ist.

(c) Erweitere die Konstruktion nun so, dass es keine Multikanten mehr gibt und es nicht mehr nötig ist, Knoten auf Fv-Wegen doppelt zu besuchen. Trotzdem soll eine unendliche Sequenz von Flussvergrößerungen erhalten bleiben.