

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 3

AUFGABE 9 (5 Punkte):

Löse die beiden folgenden Probleme mit Hilfe von Algorithmen für maximale Matchings oder Flüsse.

- (a) Eine Gruppe von p Familien geht zum Essen. Um die soziale Interaktion zu erhöhen, wollen sie sich so auf q Tische verteilen, dass keine zwei Mitglieder derselben Familie an einem Tisch sitzen. Familie i hat $a(i)$ Mitglieder und Tisch j hat $b(j)$ Plätze. Falls möglich, finde eine zulässige Zuordnung von Personen zu Tischen, die dieses Ziel erfüllt.
- (b) Gegeben seien eine Menge von m Studierenden, die auf k Übungsgruppen verteilt werden sollen. Alle Studierenden wählen Übungsgruppen aus, denen sie zugeteilt werden können. Gesucht ist eine Zuordnung von Studierenden zu Übungsgruppen, die die maximale Übungsgruppengröße minimiert.

AUFGABE 10 (2 Punkte):

Die symmetrische Differenz \oplus ist definiert als $A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Zeige, dass \oplus assoziativ ist, d. h. für Mengen A, B, C gilt $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

AUFGABE 11 (8 Punkte):

- (a) Sei M ein inklusions-maximales Matching und M^* ein maximum Matching. Zeige: $|M^*| \leq 2 \cdot |M|$.
Tipp: Wenn man die richtige Idee hat, gibt es einen recht kurzen Beweis.
- (b) Warum ist ein Sperrfluss auch im Niveaunetzwerk nicht immer auch ein maximaler Fluss? Gib für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Niveaunetzwerk G mit $O(k)$ Kanten an, so dass in G ein Sperrfluss der Kapazität 1 existiert, der maximale Fluss aber $\Omega(\sqrt{k})$ beträgt.
- (c) Warum sind Teil (a) und Teil (b) zu einer Aufgabe zusammengefasst? Was ist die Beziehung zwischen inklusions-maximalen Matchings und maximum Matchings auf der einen Seite und Sperrflüssen und maximalen Flüssen auf der anderen Seite?

AUFGABE 12 (5 Punkte):

Zeige, dass das gewichtete maximum Matching Problem und das Min-cost Matching Problem aufeinander polynomiell reduzierbar sind.

- (a) Reduziere die beiden Probleme aufeinander unter der Annahme, dass die Graphen vollständig sind.
- (b) Reduziere die Varianten für allgemeine Graphen auf die Varianten für vollständige Graphen.