

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 8

AUFGABE 30 (4 Punkte):

Betrachte die Rekursionsformel

$$T(n) = 2T\left(1 + \left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil\right) + n^2.$$

Löse diese Rekursionsformel nach dem „Kochrezept“ (Seite 22) im Skript.

AUFGABE 31 (3 Punkte):

Wie kann man in Zeit $O(n)$ die Kontraktion einer Kante, insbesondere auch die Auswahl der Kante, implementieren. Welche Datenstrukturen kann man benutzen?

Gehe davon aus, dass es möglich ist, in konstanter Zeit eine Zahl zufällig gleichverteilt aus der Menge $\{1, \dots, k\}$ für beliebiges k zu ziehen.

AUFGABE 32 (6 Punkte):

Wir gönnen uns einen alternativen Blick auf den Rekursionsbaum des Algorithmus *fastcut*. Dieser Baum ist ein vollständiger Binärbaum der Höhe $\Theta(\log n)$. Angenommen, jede Kante in diesem Baum bricht mit Wahrscheinlichkeit q , und sei $\bar{q} = 1 - q$. Sei $p(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Pfad von einem gegebenen Knoten v der Höhe k zu einem Blatt im Teilbaum unterhalb von v gibt, wobei Blätter die Höhe 0 haben. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass

$$p(k) = 1 - (1 - \bar{q} \cdot p(k-1))^2$$

für $k \geq 1$ ist, und $p(0) = 1$. Außerdem haben wir diese Rekurrenz für den Fall $q = \frac{1}{2}$ gelöst und gezeigt, dass in diesem Fall $p(k) = \Omega(\frac{1}{k})$ ist.

- (a) Angenommen, $q = \frac{1}{2}$. Zeige: $p(k) = O(\frac{1}{k})$.
- (b) Angenommen, $q = \frac{1}{2} - \epsilon$, für konstantes $\epsilon > 0$. Zeige $p(k) \geq c$, wobei $c \in (0, 1)$ ein geeigneter konstanter Term ist, d.h. ein Term, der nur von ϵ aber nicht von k abhängt.
- (c) Angenommen, $q = \frac{1}{2} + \epsilon$, für konstantes $\epsilon > 0$. Zeige $p(k) \leq c^k$, wobei $c \in (0, 1)$ ein geeigneter konstanter Term ist.

AUFGABE 33 (3 Punkte):

Die Lösung für Aufgabe 32(b) zeigt, dass man die Erfolgswahrscheinlichkeit von Algorithmus *fastcut* signifikant erhöhen kann, wenn man die Fehlerwahrscheinlichkeit q nur ein wenig verringert. Zum Beispiel, wenn wir Zeile 3 des Algorithmus in

$$t := \lceil 1 + 0.8n \rceil$$

verändern, dann ist $\bar{q} = 0.8^2 = 0.64$ und die Lösung für Aufgabe 32(b) zeigt, dass *fastcut* konstante Erfolgswahrscheinlichkeit erreicht. Ist diese Veränderung also eine gute Idee?

AUFGABE 34 (4 Punkte):

Betrachte einen Kreis mit Umfang 1. Auf diesen Kreis werden zufällig gleichverteilt n Punkte geworfen.

- (a) Wie groß ist die erwartete Intervalllänge?
- (b) Wie groß ist die erwartete Länge des Intervalls, in dem der 12-Uhr-Punkt liegt?

Tipp: Es ist keine lange Rechnung notwendig.