Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 13. Mai 2004
Abgabe Freitag, 21. Mai 2004 um 10:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 4

AUFGABE 13 (5 Punkte)**:**
Betrachte das folgende LP:
Maximiere die Zielfunktion

$$f(x) = x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 6 && (1) \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 28 && (2) \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 20 && (3) \end{aligned}$$

(a) Löse das LP graphisch.

(b) Entferne die Nebenbedingung (2). Was passiert mit der Lösung?

(c) Entferne die Nebenbedingung (3). Was passiert nun mit der Lösung?

AUFGABE 14 (5 Punkte)**:**
Multicommodity-Flow–Probleme sind Erweiterungen des einfachen Flussproblems und lassen sich wie folgt umschreiben: Es gibt mehrere Quelle-Senke-Paare (q_i, s_i), $1 \leq i \leq I$, zwischen denen jeweils ein Fluss f_i fließt. Die Kantenkapazitäten beschränken dann den Gesamtfluss aller „Commodities" (Güter) über die jeweilige Kante. Wir betrachten zwei Varianten, die sich in der zu maximierenden Größe unterscheiden:

1. Absolute Variante: Maximiere den Gesamtfluss, also die Summe der Flüsse.

2. Relative Variante: Es gibt zusätzlich Bedarfe d_i, $1 \leq i \leq I$, die den Fluss der jeweiligen Commodity beschränken. Der relative Fluss für Commodity i ist f_i/d_i. Maximiere das Minimum der relativen Flüsse.

Formuliere beide Varianten als LP und bringe sie in Normalform.

AUFGABE 15 (5 Punkte)**:**
Zeige, dass der Matching-Algorithmus von Hopcroft und Karp dem Flussalgorithmus von Dinic entspricht.

(a) Beweise, dass eine maximale Menge kürzester knotendisjunkter Wege im gerichteten Graphen G_M einem Sperrfluss im Niveaugraphen R'_M entspricht.

(b) Beweise, dass ein Sperrfluss im Niveaugraphen R'_M einer Menge knotendisjunkter Wege in G_M entspricht.

AUFGABE 16 (5 Punkte)**:**
Betrachte das Problem BIPARTIT-VERTEX-COVER: Sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph. Finde eine kleinste Knotenmenge $C \subseteq U \cup W$, so dass für alle Kanten $(u, w) \in E$ gilt $u \in C$ oder $w \in C$.
Beweise: Wenn C eine kleinste Knotenmenge mit der obigen Eigenschaft ist und M ein maximum Matching auf G ist, dann gilt $|C| = |M|$. In Worten: Zeige „Minimum-Vertex-Cover=Maximum-Matching“.
Tipp: Benutze das „Min-Cut=Max-Flow“–Theorem.