

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 6

Das im Algorithmus SeideLP verwendete Lösungskonzept kann auch auf andere Problemstellungen angewendet werden. Wir geben ein Beispiel. Aufgaben 21 bis 24 auf diesem Zettel beziehen sich auf den im Folgenden beschriebenen Algorithmus.

Gegeben sei eine Menge M mit m Punkten im \mathbb{R}^d . Wir suchen die kleinste umschließende Kugel für die Punkte in M . Diese Kugel bezeichnen wir mit $\text{ball}(M)$. Eine Menge $B \subseteq M$ bezeichnen wir als *Basis* von M , falls $\text{ball}(M) = \text{ball}(B)$ gilt. Man kann zeigen, dass es immer eine Basis der Kardinalität höchstens $d + 1$ gibt. Wir suchen eine *minimale Basis*, also eine Basis, aus der kein weiterer Punkt entnommen werden kann, ohne die Basiseigenschaft zu zerstören. Die minimale Basis muß nicht eindeutig sein. Falls eine minimale Basis B bekannt ist, können wir die gesuchte Kugel $\text{ball}(B) = \text{ball}(M)$ leicht berechnen. Deshalb sind wir an einer minimalen Basis interessiert.

Der folgende Algorithmus liefert zu einer Punktmenge M eine minimale Basis B . Der Algorithmus ist rekursiv. Als Eingabe erhält der Algorithmus eine Punktmenge M sowie eine schon teilweise berechnete minimale Basis B . Der Algorithmus soll diese Teilbasis so ergänzen, dass sie am Ende einer vollständigen minimalen Basis für die Punkte in $B \cup M$ entspricht. Der initiale Aufruf startet mit $B = \emptyset$. Im Verlauf des Algorithmus werden nach und nach geeignete Punkte von M nach B verschoben, bis B zu einer minimalen Basis herangewachsen ist. Ein Algorithmus zur Berechnung der Funktion $\text{ball}(B)$ sei bereits definiert.

Algorithmus $\text{minBasis}(M, B)$

```
if  $M = \emptyset$  then  
    return  $B$   
else  
    Wähle einen Punkt  $p \in M$  zufällig gleichverteilt  
    Berechne rekursiv  $B' := \text{minBasis}(M \setminus \{p\}, B)$   
    if  $p \in \text{ball}(B')$  then  
        return  $B'$   
    else  
        return  $\text{minBasis}(M \setminus \{p\}, B \cup \{p\})$   
    end if  
end if
```

AUFGABE 21 (2 Punkte):

Zeige, dass die minimale Kugel eindeutig bestimmt ist.

Tipp: Widerspruchsbeweis.

AUFGABE 22 (5 Punkte):

Warum berechnet der Algorithmus $\text{minBasis}(M, \emptyset)$ eine minimale Basis von M ?

- (a) Vereinfache zunächst und beweise die Korrektheit unter der Annahme, dass es eine eindeutige minimale Basis B gibt.
- (b) Gib ein Beispiel für die Existenz mehrerer minimaler Basen.
- (c) Begründe die Korrektheit des Algorithmus auch bei der Existenz mehrerer minimaler Basen.

AUFGABE 23 (4 Punkte):

Berechne die erwartete Laufzeit des Algorithmus *minBasis* unter der Annahme, dass alle einfachen Schritte wie etwa das Entfernen und Hinzufügen von Punkten zu Mengen oder auch der Test $p \in \text{ball}(B')$ in Zeit $\text{poly}(d)$ ausgeführt werden können, wobei $\text{poly}(\cdot)$ eine geeignete polynomielle Funktion ist.

AUFGABE 24 (4 Punkte):

Es gibt zahlreiche andere geometrische Probleme, die nach dem gleichen Prinzip gelöst werden können.

- (a) Beispielsweise ist die Größe der minimalen Basis bei volumen-minimalen Ellipsen höchstens $d(d+3)/2$. Wie wirkt sich die Basisgröße im Allgemeinen auf die Laufzeit des Algorithmus *minBasis* aus?
- (b) Wie könnte man die „Basis“ beim Algorithmus *SeideLP* zur Lösung von Linearen Programmen definieren?

AUFGABE 25 (5 Punkte):

Sei $f(d) = d \cdot f(d-1) + d^2 + d$ und $f(1) = 1$. Zeige, dass es eine Konstante $k_0 > 0$ gibt, so dass $f(d) \leq k_0 d!$ für alle $d \geq 1$ gilt.