Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 17. Juni 2004
Abgabe 24. Juni 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 9

AUFGABE 35 (5 Punkte)**:**
Anlässlich der Fussball EM steckt in jedem Duplo eines von n Sammelbildchen (zufällig gleichverteilt). Wie viele Duplos musst Du im Erwartungswert kaufen, bis Du alle Bilder zusammen hast?

(a) Sei T_i die Anzahl von Duplos, die Du kaufen musst, wenn Du bereits i Bilder gesammelt hast, um ein neues Bild zu erhalten. Wie groß ist $\mathrm{E}[T_i]$?

(b) Sei T die erwartete Anzahl von Duplos bis zum Erhalt aller Bildchen. Wie groß ist $E[T]$?

Tipp: Benutze die Linearität des Erwartungswertes und die harmonische Reihe.

(c) Zeige zusätzlich: $T = O(n \log n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit.

AUFGABE 36 (5 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Las Vegas Algorithmus A. Sei $f(n)$ eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit von A bei Eingabegröße n. Um Algorithmus A mit der im Skript beschriebenen Methode in einen Monte Carlo Algorithmus B mit Erfolgswahrscheinlichkeit B zu transformieren, der eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 99,9% hat, muss der Algorithmus für $1000 \cdot f(n)$ Schritte laufen. Geht das mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsamplifikation auch schneller?

AUFGABE 37 (5 Punkte)**:**
Wir werfen n Bälle uniform zufällig in n Kisten. Sei $A_i = A_i(n)$ die Anzahl der Kisten mit i Bällen.

(a) Analysiere die erwartete Anzahl der Kisten, die keinen Ball erhalten. Berechne insbesondere $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[A_0/n]$. Hinweis: Berechne zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kiste leer bleibt. Die Gleichung $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$ ist dabei nützlich. Aus dieser Wahrscheinlichkeit lässt sich der gesuchte Erwartungswert mit Hilfe der Linearität des Erwartungswertes herleiten.

(b) Berechne $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[A_i/n]$, für festes $i \geq 1$. Hinweis: Gib ähnlich wie in Aufgabe (a) vor. Verwende Binomialkoeffizienten zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten. Für festes $i \geq 0$ gilt $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x-i} = \frac{1}{e}$.

AUFGABE 38 (5 Punkte)**:**
Drei Freunde (Andreas, Bärbel und Christian) nehmen an einer Fernsehshow teil. In der letzten Runde wird jedem der drei Freunde ein Hut mit einer zufälligen Farbe aufgesetzt, rot oder grün, jeweils unabhängig mit 50% Wahrscheinlichkeit.

Jeder der drei sieht die Farben der anderen, nicht aber seine eigene, und darf einen verdeckten Tipp über die Farbe des eigenen Hutes abgeben oder sich enthalten. Die drei Freunde gewinnen eine Kaffeemaschine, wenn mindestens einer von ihnen einen richtigen Tipp abgibt und keiner einen falschen Tipp.

Wie sollen sich die drei Freunde verhalten und welche Erfolgswahrscheinlichkeit können sie bei geschickter Strategiewahl erzielen? – Unterhalten und Zeichengeben während des Spiels sind verboten. Vorabsprachen zur Verabredung einer Strategie sind erlaubt. Behauptung: weit mehr als 50% Erfolgswahrscheinlichkeit sind möglich.