Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 24. Juni 2004
Abgabe 1. Juli 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 10

AUFGABE 40 (5 Punkte)**:**
Betrachte die drei Varianten von VERTEX-COVER Probleme

- EVC – Entscheidungsvariante: „Gibt es ein Vertex Cover der Kardinalität k?“
- OVC – Optimierungsvariante: „Welche Kardinalität hat das kleinste Vertex-Cover?“
- MINVC – Konstruktion der Lösung: „Finde eine kleinstes Vertex-Cover und gib es aus.“

Zeige, dass die Varianten polynomiell aufeinander reduzierbar sind. (Dabei ist die Richtung MINVC $\Rightarrow$ OVC $\Rightarrow$ EVC trivial.)

(a) Nimm an, dass Du einen Algorithmus für EVC mit Laufzeit $poly(n)$ zur Verfügung hast. Gib einen Polynomialzeitalgorithmus für OVC an.

(b) Nimm an, dass Du einen Algorithmus für OVC mit Laufzeit $poly(n)$ zur Verfügung hast. Gib einen Polynomialzeitalgorithmus für MINVC an.

Zeige jeweils auch die Korrektheit und begründe, warum der konstruierte Algorithmus wieder polynomielle Laufzeit hat.

AUFGABE 41 (5 Punkte)**:**

(a) Finde einen Graphen, für den der vorgestellte Algorithmus Approx-VC aus dem Skript immer eine suboptimale Lösung liefert.

(b) Betrachte den Greedy-Set-Cover Algorithmus aus dem Skript. Finde eine Klasse von ungewichteten Set-Cover Instanzen, für die die erreichte Approximationsgüte nur $O(\log n)$ ist.

AUFGABE 42 (5 Punkte)**:**
Wir werfen $n \log n$ Bälle in n Kisten. Im Erwartungswert erhält jede Kiste offensichtlich $\log n$ Bälle.
Zeige: In der Kiste mit den meisten Bällen landen ebenfalls nur $O(\log n)$ Bälle m. h. W.
Tipp: Folge dem Beweis von Satz 10 aus dem Skript.

AUFGABE 43 (5 Punkte)**:**
Der randomisierte Routing-Algorithmus berechnet Wege mit Congestion $O(opt \cdot \log m)$ m. h. W. Der Algorithmus geht davon aus, dass alle Kanten gleichartig sind. Dies ist häufig nicht der

Fall, sondern Kanten haben beispielsweise Bitraten. Diese Bitraten modellieren wir in Form von Kantengewichten $b : E \to \mathbb{N}$. Die Congestion einer Kante e definieren wir entsprechend als

$$C(e) = \sum_{i \in [k] : e \in P_i} \frac{d_i}{b(e)}.$$

Kanten mit höherer Bitrate können also bei gleicher Congestion mehr Daten übertragen. Im gleichen Sinne ändern wir das LP für das Mehrgüterflussproblem. Dadurch erhalten wir die modifizierte Bedingung

$$\forall e \in E : \sum_{i \in [k]} f_{i,e} \frac{d_i}{c(e)} \leq C.$$

Alle anderen Details lassen wir zunächst unverändert.

(a) Beschreibe ein einfaches Beispielnetzwerk mit einem Fluss, so dass nach dem randomisierten Runden die Congestion mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf $opt(m-1)$ ansteigt.

Tipp: Das Netzwerk ist ein gerichteter Multigraph bestehend aus nur zwei Knoten mit m parallelen Kanten mit geeigneten Gewichten.

(b) Wo versagt der in der Vorlesung präsentierte Beweis, wenn man gewichtete Kanten erlaubt?

(c) Wir stellen uns vor, ein Orakel verrät uns die optimale Congestion, also den Wert von opt. Wie können wir den Algorithmus reparieren, so dass wir wieder eine $O(\log m)$-Approximation erhalten?

Tipp: Modifiziere das lineare Programm. Welche Kanten sollten für welche Commodity verboten werden?